

Chapter 15

ENREGISTREMENT GRAPHIQUE DU PROFIL D'UNE HOULE DE LABORATOIRE ANALYSE HARMONIQUE

L. Santon

Professeur à la Faculté des Sciences

Directeur Technique des Laboratoires de Mécanique des Fluides
de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique
de Grenoble

L'appareil qui est décrit dans la présente communication et que j'ai réalisé avec la collaboration de M. Marcou, a fait depuis deux ans, sous la désignation de S.M. l'objet de diverses publications (1), (2), (3). Mais, tandis que l'utilisation première de l'appareil avait été, au sens propre, la représentation du profil instantané d'une houle, il est apparu, à la réflexion, que ce seul but restreignait singulièrement les possibilités de l'instrument. C'est, plus généralement et plus précisément encore, la loi d'évolution de la cote en fonction du temps ou, si l'on accepte cette expression imagée : "le profil dans le temps" d'une surface libre animée d'un mouvement périodique que l'on peut obtenir. En particulier, c'est l'étude du profil dans le temps et non celle du profil instantané dans l'espace qui permet l'analyse harmonique.

Cette considération, jointe à celle des perfectionnements successivement apportés à l'appareil, nous ont paru justifier que soient reprises la théorie et la description du dispositif.

Notre collègue, M. Julien Kravtchenko, nous a apporté de nombreuses et utiles remarques sur la théorie, aussi bien que sur les possibilités de l'appareil. M. Marcou a effectué les très nombreux enregistrements. Nous sommes heureux de rendre hommage à leur concours.

1 - PRINCIPE DE L'APPAREIL

1.1.- Avant de rappeler le principe de l'appareil, nous tenons à préciser les limites de son emploi. Sous sa forme actuelle, il permet l'étude sur une verticale donnée, - et même sur deux verticales distinctes - de la variation de la cote z de la surface libre en fonction du temps t , sous l'action d'un générateur périodique animé par un mouvement de rotation uniforme. Il permet l'enregistrement fidèle de toute loi $z = f(t)$, respectant la périodicité du générateur, c'est-à-dire présentant soit la période du générateur, soit celle de ses harmoniques. Il met pratiquement en évidence

toute perturbation, qu'il s'agisse d'un phénomène non périodique, ou d'un phénomène dont la période n'est ni celle du générateur ni l'une de ses sous-multiples.

Précisons encore qu'il est possible d'envisager, au prix de certaines modifications et complications de l'appareil, son application à l'enregistrement d'une loi de variation quelconque de la cote de la surface libre en fonction du temps.

1.2.- On peut schématiser les dispositifs existants en disant qu'ils se ramènent à la mesure de la variation d'une grandeur en fonction du temps, le plus souvent la profondeur d'immersion d'une pointe. Dans notre appareil ce qui est enregistré, c'est l'instant où la surface libre atteint l'extrémité d'une pointe, soit à l'immersion, soit à l'émergence. Il n'est donc plus nécessaire de mesurer une grandeur, mais seulement de détecter l'apparition ou la disparition d'un phénomène. L'inscription se fera donc par "tout ou rien" et l'on conçoit que, dans une telle réalisation, l'inertie de l'appareil enregistreur puisse être rendue pratiquement nulle.

L'inconvénient de l'appareil est qu'il ne donne que l'instant où une cote déterminée est atteinte, c'est-à-dire que la loi $z = f(t)$, n'est connue que pour une valeur particulière z_1 de z . Pour avoir d'autres points de la courbe, on peut songer à prendre un grand nombre de pointes dont les extrémités seraient à des cotes $z_2, z_3, \text{etc.}$. Nous avons préféré, dans notre réalisation simple, utiliser la périodicité du phénomène principal pour n'employer qu'une seule pointe en faisant varier lentement la cote de son extrémité en fonction du temps, de sorte que les solutions en t des équations :

$$z_2 = f(t) \qquad z_3 = f(y) \qquad \text{etc.}$$

seront obtenues non pas au cours d'une même période, mais au cours des périodes successives.

Ainsi, pour opérer aux différentes cotes, il est nécessaire d'attendre les périodes successives, et, par suite, d'admettre que le phénomène se reproduit identiquement au cours des périodes successives. Cet inconvénient ne nous a pas paru de nature à diminuer l'intérêt de notre dispositif, car il nous semble qu'un batteur qui n'engendrerait pas un phénomène rigoureusement périodique ne saurait être que d'une utilité réduite dans un laboratoire. Nous pensons même que la minute, ou parfois les quelques minutes nécessaires pour obtenir chaque enregistrement, constituent un excellent moyen pour que l'expérimentateur soit, chaque fois, obligé de contrôler la régularité absolue du phénomène.

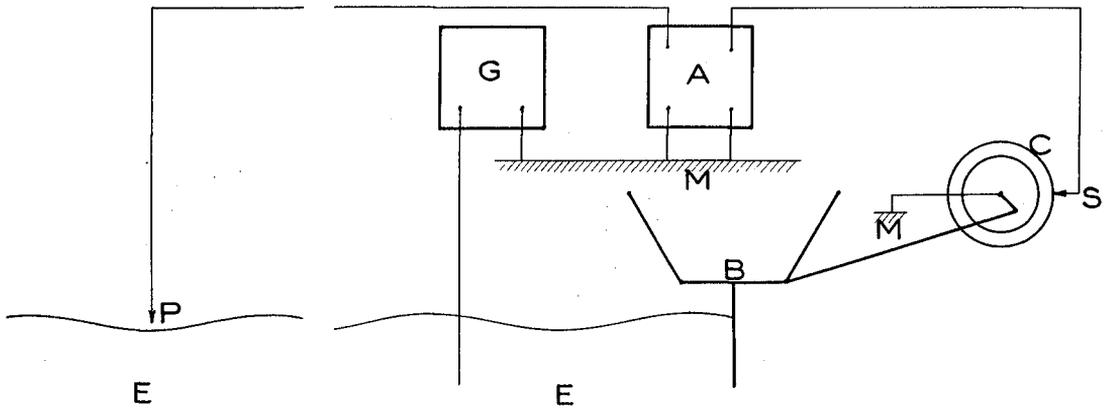


Fig 1 - Schéma de principe des montages mécanique et électrique de l'enregistreur.

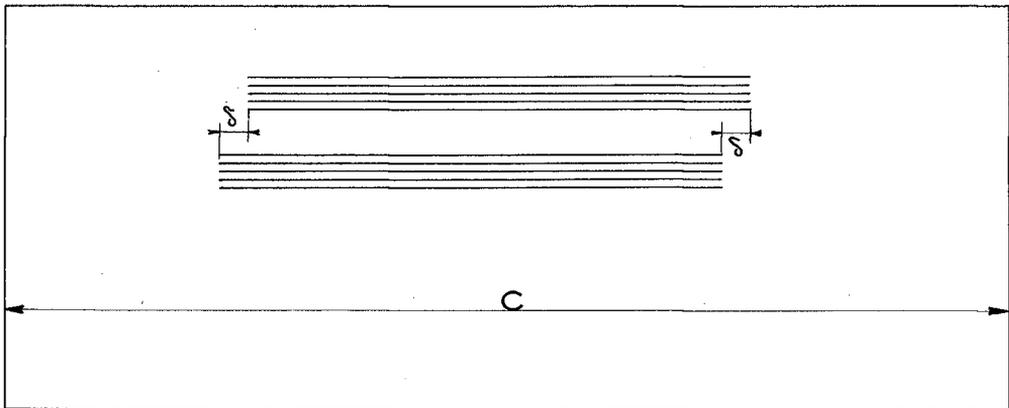


Fig 2 - Enregistrement permettant le calcul de la longueur d'onde.

Un tel dispositif n'élimine pas l'objection de principe qu'une perturbation assez brève peut se produire dans une certaine zone de cotes, cependant que la pointe, placée à cet instant dans une zone de cotes assez éloignée, ne peut pas l'enregistrer. En fait, toute perturbation doit intéresser par continuité un intervalle de cotes assez grand et il paraît impossible qu'elle puisse échapper totalement à un enregistrement, encore moins à la comparaison de plusieurs enregistrements successifs. Au reste, cette même objection de principe reste valable pour les appareils habituels, pour lesquels on peut craindre que l'inertie n'empêche l'enregistrement d'une perturbation trop rapide. D'autre part, il est possible, avec le S.M., de vérifier, qu'à une cote déterminée, quelconque d'ailleurs, le phénomène est rigoureusement périodique.

1.3.- Le principe de l'appareil est donné ci-après et le schéma des montages mécanique et électrique est reproduit dans la fig 1. Un générateur basse fréquence G à 5 000 Hz établit une faible différence de potentiel entre l'eau E du canal à houle et la masse M des appareils ; une pointe métallique P, dont l'extrémité inférieure est à la cote z, que nous supposons fixe pour l'instant, est reliée à l'une des bornes d'entrée d'un amplificateur A, l'autre étant la masse ; les bornes de sortie sont reliées : l'une à un stylet inscripteur métallique S en contact avec la surface d'un cylindre enregistreur également métallique C, l'autre à la masse à laquelle est aussi relié le cylindre C. Celui-ci est recouvert de papier conducteur à couche superficielle sensible "Télédelto" ; il est, d'autre part, mis en mouvement de rotation uniforme par liaison avec l'axe du volant V qui entraîne le batteur trois-barres B(4), (5), de sorte qu'il exécute un tour par période du batteur.

Si l'extrémité de la pointe est à une cote intermédiaire entre les niveaux extrêmes de l'eau, le courant ne passe que pendant la durée de l'immersion de cette extrémité et, après développement du papier sur un plan, on obtient un segment de droite. Il y a proportionnalité entre la longueur de ce segment et celle de la bande de papier, d'une part, et la durée de l'immersion et la période du batteur, d'autre part.

1.4.- Supposons maintenant que la pointe et le stylet soient montés sur des chariots animés de mouvements lents et uniformes, la première de haut en bas, le second horizontalement le long d'une génératrice du cylindre enregistreur. À chaque période se produit une inscription pour des cotes de plus en plus faibles. L'arc de cercle obtenu dans l'hypothèse précédente est remplacée par une succession d'arcs d'une même hélice, de pas très faible. Après développement du papier sur un plan, on obtient des droites parallèles très légèrement inclinées sur le développement d'une section droite du cylindre enregistreur. L'ensemble de ces traits constitue, en hachures fines et régulières, le profil de la loi : $z = f(t)$.

1.5.- Les chariots portant la pointe et le stylet sont entraînés par des vis hélicoïdales de même pas montées sur l'arbre de moteurs synchrones. Lorsque les moteurs synchrones ont la même vitesse, n tours par seconde, les cotes sont représentées en vraie grandeur sur l'enregistrement. Nous avons opéré avec $n = 1$ tour par seconde, mais nous avons aussi souvent pris, pour la vis d'entraînement de la pointe, une vitesse de rotation trois fois plus faible, soit $n' = 1/3$ t/s; les cotes sont alors agrandies 3 fois sur l'enregistrement. Cette technique nous a été très utile pour mettre en évidence les détails du profil ; l'enregistrement durait alors trois fois plus longtemps.

Si T mesure la période du batteur en secondes, l'espacement des traits est $n.h.T$ mm, et, avec $n = 1$ t/s et $h = 1$ mm, il s'exprime en millimètres par le nombre T . Les périodes ayant varié de 0,6 à 1,3 s, l'espacement des hachures a été compris entre 0,6 et 1,3 mm. La longueur des enregistrements étant de 492 mm, la pente des hachures a été de l'ordre de $1/500$.

Remarquons encore que l'extrémité d'un trait pouvant être connue avec une précision de l'ordre du $1/2$ mm, c'est avec une précision de l'ordre de $T/1000$ que l'instant de l'immersion ou de l'émergence peut être déterminé. Il y a là, croyons-nous, une performance remarquable de l'appareil qui explique l'intérêt des résultats obtenus.

Signalons, d'autre part, que le cylindre enregistreur est entraîné par un système de pignons. Le plus fréquemment, la démultiplication employée a été 1, les pignons permettant seulement de désolidariser aisément le cylindre et le batteur. Mais, en changeant de pignons, nous avons pu faire tourner le cylindre à une vitesse angulaire double de celle du batteur ; cette disposition, que nous avons utilisée pour l'analyse harmonique, permet d'augmenter la précision avec laquelle le temps est mesuré. Nous n'avons d'ailleurs pas poussé davantage dans cette voie ; lorsque la vitesse de déroulement devenait trop grande, il se produisait un saut du stylet au passage du renflement correspondant au collage de la bande de papier qui nuisait à la netteté de l'inscription. L'obstacle n'était sans doute pas insurmontable, mais il nous est apparu que ce que nous avions obtenu était suffisant.

1.6.- La précision que nous obtenions sur la mesure du temps nous a paru diminuée, au moins lors de l'émergence, par la goutte qui se rassemblait à l'extrémité de la pointe et maintenait le contact un peu plus longtemps que ne l'aurait voulu la loi du mouvement. À l'immersion la présence d'une goutte, pendant à l'extrémité de la pointe, pouvait donner un contact prématuré. Nous avons réalisé une pointe recourbée, convenablement enrobée d'isolant jusqu'à son extrémité, qui seule était démodée. Après de nombreux essais, nous avons dû conclure que les enregistrements, bien que fidèles, manquaient de netteté au début et à la fin des traits, par suite de la conductibilité de la pellicule d'eau qui recouvrait l'isolant aux instants correspondants.

Les meilleurs résultats ont finalement été obtenus en utilisant une fine pointe d'acier, constituée par un rayon de roue de bicyclette convenablement affuté et fréquemment décapé à la toile émeri.

Signalons enfin que, pour éviter les effets de polarisation, la pointe a été attaquée sous une tension très faible. L'amplificateur donnait ensuite la tension nécessaire à l'inscription sur le papier.

1.7.- Nous avons été conduits à étudier simultanément l'évolution de la loi $z = f(t)$ suivant deux verticales distinctes. En appliquant l'hypothèse de base sur laquelle est fondé l'emploi de notre appareil, nous aurions pu opérer successivement suivant les deux verticales et rattacher, pour les deux enregistrements, l'origine des temps à une position fixe du batteur, à un certain nombre de périodes près, évidemment. Nous avons craint que l'intervalle de temps assez grand ainsi que l'arrêt du batteur qui aurait séparé les deux enregistrements, ne permette au phénomène fin qui nous intéressait de se modifier. Aussi avons-nous préféré utiliser une deuxième pointe exploratrice, en tout point semblable à la première, alimentée par le même générateur B.F. mais avec un amplificateur distinct ; le stylet inscripteur était monté sur le même chariot que le premier, avec un décalage suffisant pour que les deux enregistrements ne se chevauchent pas. Cette particularité nous a empêché d'utiliser l'agrandissement β pour les cotes, si intéressant pour observer les particularités de la loi, mais les enregistrements simultanés nous ont permis de contrôler les observations faites sur les enregistrements distincts et à grande échelle. Une modification du cylindre enregistreur qui permettra de recueillir simultanément des enregistrements à grande échelle est d'ailleurs en cours.

2 - ETUDE D'UNE HOULE PURE

2.1.- La première des applications à laquelle nous avons songé, a été l'étude de la houle progressive produite dans un canal. D'une manière générale si x, y , désignent les coordonnées de l'intersection d'une verticale avec un plan horizontal de référence, la cote z de la surface libre en tout point est une fonction de x , de y et de t :

$$z = f(x, y, t)$$

Dans la première partie de notre exposé, comme nous n'avons envisagé qu'une position de la pointe, nous ne nous sommes intéressés qu'à la fonction z du temps. Si nous admettons maintenant que, dans le canal, on a

affaire à un phénomène progressif se propageant uniquement dans la direction de l'axe du canal, direction que nous prenons pour axe des x , z sera seulement fonction de x et de t .

Considérons, en particulier, le cas d'une houle monopériodique de période T , c'est-à-dire ne possédant pas d'harmonique ; elle a, en profondeur constante, une longueur d'onde λ bien définie et z est fonction de t et de x par l'intermédiaire de la variable sans dimension :

$$\mu = \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}$$

$$z = f(\mu)$$

L'enregistrement obtenu, qui nous donne, pour une abscisse fixe la loi reliant z à t , constitue aussi, à un instant donné, la représentation de la loi liant z à x . Dans le premier cas, si nous adoptons, pour lire le graphique, la longueur de la bande comme unité de longueur, l'unité de temps correspondante est la période ; dans le second cas, avec la même convention l'unité de longueur, pour mesurer les abscisses selon l'axe du canal, est la longueur d'onde. Sous cette réserve, l'enregistrement représente le profil instantané de la houle tel que pourrait le donner, par exemple, une photographie.

2.2.- Nous avons vu que les cotes sont reproduites sur nos enregistrements en vraie grandeur - ou agrandies 3 fois -, mais que pour passer aux profils réels, il est nécessaire de remplacer la longueur du cylindre par la longueur d'onde. Pour que le tracé conserve toute la précision de l'enregistrement, il faut connaître la longueur d'onde avec la même précision. C'est ce que notre appareil permet de faire dans des conditions inégalées, à notre avis.

Plaçons les deux pointes de mesure à une même cote que nous laissons invariable durant toute la mesure et à une distance d l'une de l'autre, comptée dans le sens de la propagation. Il est commode de choisir pour cette cote, celle du plan d'eau du canal au repos pour laquelle le réglage des deux pointes est particulièrement rapide et précis et pour laquelle la méthode a la précision maximum. On obtient alors, comme enregistrements, des arcs de cercle qui donnent des segments de droite, après développement (Fig 2). Il y a proportionnalité entre les décalages δ des origines - ou des extrémités - des traits donnés par les deux pointes et la circonférence C du cylindre d'une part, et la distance d des deux pointes et la longueur d'onde λ , d'autre part, à un entier près k :

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{\delta}{C} + k$$

Dans une première mesure, on prend d voisin de λ par suite k est égal à 1 et δ a une valeur faible, positive ou négative. La valeur de λ ainsi précisée, on peut choisir une valeur de d beaucoup plus grande et, toute incertitude levée sur la valeur de l'entier k , calculer λ avec précision. Le calcul de l'erreur donne :

$$\left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\Delta d}{d} \right| + \left| \frac{\Delta \delta}{\delta + kC} \right|$$

On peut prendre $\Delta d = 0,5$ mm ; si l'on opère sur plusieurs vagues successives on peut prendre des moyennes et admettre sans difficulté que $\Delta \delta = 0,5$ mm ; on aura, pour $\lambda = 1000$ mm et $k = 1$, $\Delta \lambda = 1,5$ mm. Si l'on augmente d de manière à prendre $k = 10$ on aura $\Delta \lambda = 0,15$ mm. Aucune houle, même de laboratoire, ne sera jamais assez pure pour que sa longueur d'onde puisse être définie avec une telle précision.

2.3.- L'erreur provenant d'une légère différence dans le calage des deux pointes sera diminuée si l'on prend la moyenne entre les décalages des origines et des extrémités des traits.

Signalons enfin que notre procédé nous paraît nettement supérieur, de par son principe même, au procédé habituel ; celui-ci cherche en effet à mesurer la distance qui sépare deux crêtes, consécutives ou non ; or, une fonction variant peu au voisinage d'un maximum, la détermination de l'abscisse pour laquelle ce maximum est obtenu ne peut pas être très précise. Dans notre méthode, la mise de la pointe à la cote où la pente du profil est maximum, donne une très bonne précision sans avoir à prendre comme base plusieurs longueurs d'onde. Par contre, le fait d'opérer sur une base d'un nombre entier de longueurs d'onde élimine, comme nous le verrons plus loin, les erreurs dues à la houle réfléchie.

2.4.- Au point de vue expérimental, nos résultats n'ont pas présenté la cohésion qu'aurait permise l'appareil ; selon l'emplacement, ou la longueur, de la base choisie pour faire la mesure, les longueurs d'ondes obtenues - qui allaient de 1 à 2 m - ont présenté des désaccords de l'ordre du centimètre, aussi bien entre elles qu'avec la longueur d'onde théorique déduite de la formule d'Airy.

Précisons d'ailleurs que les résultats rapportés ci-dessus ont toujours été obtenus pour des bases très voisines d'une longueur d'onde ou d'un nombre entier de longueurs d'onde. Sur des bases différant nettement d'un nombre entier de demi longueurs d'onde, l'écart avec la valeur théorique est beaucoup plus grand ; les plus forts écarts ont été observés pour des bases voisines d'un quart de longueur d'onde, ils approchaient alors de 10%.

Nous donnerons plus loin les éléments d'une théorie qui attribue ces écarts d'une part à la présence des harmoniques, d'autre part à celle d'une houle réfléchié ; nous verrons que l'emploi de bases qui sont des multiples entiers d'une demi longueur d'onde élimine l'effet dû à la houle réfléchié et nous donnerons le moyen de calculer les longueurs d'onde des différents constituants d'une houle complexe. Mais il n'en reste pas moins que si, grâce à certains artifices, on arrive à avoir des résultats moyennement cohérents, la longueur d'onde d'une houle complexe échappe à toute définition précise.

2.5.- Dans les premiers articles dont nous avons donné les références au début de cette communication, nous avons surtout insisté sur cette fonction de l'appareil qui traçait le profil instantané de la houle dans l'espace. Il nous semble maintenant que, quel que soit l'intérêt de cette représentation, ce n'est pas pour cela que l'appareil est le plus remarquable.

En fait, étant donné un point de coordonnées horizontales x, y , la cote z de la surface libre en ce point est une fonction du temps t :

$$z = f(x, y, t)$$

C'est dans la précision avec laquelle sont définies les valeurs de t solutions de cette équation pour tout ensemble de valeurs x, y, z , c'est-à-dire en définitive la précision avec laquelle est définie la fonction $z = z(t)$ pour des valeurs données de x, y , que réside l'intérêt essentiel de l'appareil. La représentation de z en fonction de x , pour si spectaculaire qu'elle soit, fait appel à la notion de longueur d'onde dont la définition, forcément imprécise, comme on vient de le voir, dans le cas d'une houle complexe, ne peut que diminuer la précision qu'on peut attendre de l'appareil.

3 - ANALYSE HARMONIQUE D'UNE HOULE COMPLEXE - ETUDE DU CLAPOTIS PARTIEL

3.1.- Les enregistrements d'une houle complexe que nous avons obtenus ont pu être soumis à l'analyse harmonique ; celle-ci a été réalisée, soit par la méthode classique de Fourier consistant à calculer les intégrales définies de la forme :

$$\int_0^T z(t) \sin \frac{2\pi t}{T/n} dt \quad \text{et} \quad \int_0^T z(t) \cos \frac{2\pi t}{T/n} dt$$

qui donnent, au facteur $2/T$ près, les coefficients a_n et b_n du développement ; soit par la méthode semi-graphique selon laquelle on forme des quantités telles que :

$$z(t) \pm z\left(t + T/2\right)$$

$$z(t) + z\left(t + T/3\right) + z\left(t + 2T/3\right)$$

Signalons que, pour cette dernière méthode, le travail peut être simplifié si la commande du cylindre enregistreur se fait par l'intermédiaire d'une démultiplication, les valeurs à additionner se trouvant placées alors sur les mêmes ordonnées.

Nous avons constaté que les analyses harmoniques faites dépendaient, tant pour les amplitudes que pour les déphasages, de l'abscisse du point considéré. Nous en avons déduit que le clapotis partiel jouait un rôle important dans la représentation de chaque harmonique et c'est à l'étude de ce rôle que nous nous sommes consacrés.

3.2.- Nous allons donc nous borner à l'étude du fondamental résultant de la combinaison d'une houle monopériodique de période T et de la houle réfléchi de même période. Nous appliquerons les résultats de la théorie que nous allons donner, au fondamental tel qu'il résulte de l'analyse harmonique, mais nous pourrions en faire autant pour chacun des harmoniques.

En attendant la réalisation d'enregistrements simultanés à grande échelle dont nous avons plus haut signalé la nécessité, nous avons choisi une origine des temps représentée par l'instant, défini à T près, où le batteur passe par une position déterminée et dans un certain sens. A cette position est associée celle d'une génératrice de l'enregistreur suivant laquelle on découpe le papier, fixant ainsi l'origine des temps sur l'enregistrement.

Nous imaginons ensuite que la houle réfléchi est renvoyée par un mur fictif vertical sur lequel nous admettons que se produit la réflexion. Dans ces conditions, si t désigne l'instant où une houle pure sinusoidale incidente de période T produit sur le mur réfléchissant une dénivellation nulle, la loi de la houle progressive incidente de longueur d'onde λ et d'amplitude a est, en un point situé à la distance x de cette paroi, comptée positivement dans le sens opposé à la propagation :

$$z = a \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

la loi de la houle réfléchie, d'amplitude a_1 sera :

$$z = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

avec, évidemment, $a_1 < a$

Précisons que les grandeurs t_0 et x n'ont pas d'existence réelle, ce sont des constantes mises dans les expressions ; mais, d'une part, nous leur avons donné une signification physique, et, d'autre part, les variations de z et de $(t_0/T - x/\lambda)$ sont des grandeurs mesurables.

La composition de ces deux mouvements donne une loi sinusoidale :

$$z = A \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} + \varphi \right)$$

les constantes A et φ étant définies par les deux relations :

$$A \cos 2\pi \varphi = (a + a_1) \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (1)$$

$$A \sin 2\pi \varphi = (a - a_1) \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (2)$$

qui, résolues en A et φ s'écrivent :

$$A^2 = a^2 + a_1^2 + 2a a_1 \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \varphi = \frac{a - a_1}{a + a_1} \operatorname{tg} 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (4)$$

Mais, en fait, l'analyse harmonique des enregistrements donne A et $\alpha = t_0/T - \varphi$, les inconnues étant a , a_1 , x et t_0 , — λ étant

supposé connu. Pour déterminer leurs valeurs, il est nécessaire d'analyser l'enregistrement réalisé à une distance d' du premier, comptée dans le sens de propagation de la houle incidente et on a alors deux nouvelles relations, en désignant par A' , x' , φ' et α' les grandeurs

correspondantes :

$$A'^2 = a^2 + a_1^2 + 2a a_1 \cos 4\pi \frac{x'}{\lambda} \quad (3')$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \varphi' = \frac{a - a_1}{a + a_1} \operatorname{tg} 2\pi \frac{x'}{\lambda} \quad (4')$$

avec : $\alpha' = \frac{t_0}{T} - \varphi'$ et $x' = x - d'$

On n'introduit aucune nouvelle inconnue, et le système de 4 équations permet, théoriquement, de calculer les valeurs de a , a_1 , x et t_0 .

3.3.- Dans le cas général, la résolution d'un tel système est malaisée. Le calcul littéral peut être poussé si l'on considère l'enregistrement obtenu en un troisième point, à la distance d'' du premier. Si nous notons A'' , x'' , φ'' et α'' les grandeurs correspondantes, nous avons deux équations supplémentaires :

$$A''^2 = a^2 + a_1^2 + 2a a_1 \cos 4\pi \frac{x''}{\lambda} \quad (3'')$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \varphi'' = \frac{a - a_1}{a + a_1} \operatorname{tg} 2\pi \frac{x''}{\lambda} \quad (4'')$$

avec : $\alpha'' = \frac{t_0}{T} - \varphi''$ et $x'' = x - d''$

Une combinaison des équations (3), (3') et (3'') élimine a et a_1 :

$$\begin{aligned} \frac{A''^2 - A^2}{A'^2 - A^2} &= \frac{\cos 4\pi \frac{x-d''}{\lambda} - \cos 4\pi \frac{x}{\lambda}}{\cos 4\pi \frac{x-d'}{\lambda} - \cos 4\pi \frac{x}{\lambda}} \\ &= \frac{\sin 2\pi \frac{d''}{\lambda} \sin \left[4\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{d''}{\lambda} \right]}{\sin 2\pi \frac{d'}{\lambda} \sin \left[4\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{d'}{\lambda} \right]} \end{aligned}$$

posons :

$$k = \frac{A''^2 - A^2}{A'^2 - A^2} \frac{\sin 2\pi \frac{d'}{\lambda}}{\sin 2\pi \frac{d''}{\lambda}}$$

il vient :

$$\operatorname{tg} 4\pi \frac{x}{\lambda} = \frac{k \sin 2\pi \frac{d'}{\lambda} - \sin 2\pi \frac{d''}{\lambda}}{k \cos 2\pi \frac{d'}{\lambda} - \cos 2\pi \frac{d''}{\lambda}} \quad (5)$$

x peut donc être calculé.

Le calcul du coefficient de réflexion $c = a_1/a$ résulte alors de la comparaison des équations (3) et (3'). Le rapport,

$$\frac{A'^2}{A^2} = \frac{1 + c^2 + 2c \cos 4\pi \frac{x-d'}{\lambda}}{1 + c^2 + 2c \cos 4\pi \frac{x}{\lambda}}$$

donne, en posant : $k' = \frac{A'^2}{A^2}$

$$(1+c^2)(1-k') + 2c \left[\cos 4\pi \frac{x-d'}{\lambda} - k' \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} \right] = 0 \quad (6)$$

équation du second degré en c qui fournit deux racines inverses l'une de l'autre, par suite des rôles symétriques joués dans les équations par les variables a et a_1 . Nous choisirons, évidemment, la racine inférieure à 1.

En remplaçant a_1 par $c \cdot a$ dans l'équation (3), on peut calculer a :

$$a^2 = \frac{A^2}{1 + c^2 + 2c \cos 4\pi \frac{x}{\lambda}} \quad (7)$$

a_1 en est déduit immédiatement.

Ainsi les 3 équations (3), (3') et (3'') nous donnent les valeurs de x , a et a_1 .

En portant les valeurs de x et de c dans l'équation (4) où l'on remplace φ par $t_0/T - \alpha$ on a t_0 puisque α est donné par les zéros de la fonction z :

$$t_0 \ 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \alpha \right) = \frac{1-c}{1+c} t_0 \ 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

La même opération répétée sur les équations (4') et (4'') doit, à titre de vérification, fournir les mêmes valeurs pour t_0 .

Cette vérification peut d'ailleurs permettre de calculer la valeur de λ en reprenant tout le calcul pour quelques valeurs de λ voisines de la valeur présumée et en choisissant celle qui assure l'égalité des solutions en t_0 des équations (4), (4') et (4'').

3.4.- Le calcul peut être simplifié si l'on prend la distance d' égale à un quart de longueur d'onde et si l'on consent les approximations justifiées par la faible valeur de c ; il suffit alors d'opérer sur deux points.

Les équations (3) et (3') deviennent, si l'on fait $x' = x - \frac{\lambda}{4}$:

$$A^2 = a^2 \left[1 + c^2 + 2c \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} \right]$$

$$A'^2 = a^2 \left[1 + c^2 - 2c \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} \right]$$

par addition et soustraction on trouve :

$$A^2 - A'^2 = 4 a^2 c \cos 4\pi \frac{x}{\lambda}$$

$$A^2 + A'^2 = 2 a^2 \left[1 + c^2 \right]$$

divisant membre à membre, on élimine a :

$$c \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} = \frac{A^2 - A'^2}{2(A^2 + A'^2)} \left[1 + c^2 \right] \quad (8)$$

et, si l'on convient de négliger c^2 devant 1, on obtient la relation simple :

$$c \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{A^2 - A'^2}{A^2 + A'^2} \quad (9)$$

D'autre part, en négligeant les termes en c^2 devant ceux en c , la relation (4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\pi \varphi &= (1 - 2c) \operatorname{tg} 2\pi \frac{x}{\lambda} \\ \operatorname{tg} 2\pi \varphi &= \operatorname{tg} 2\pi \frac{x}{\lambda} - 2c \operatorname{tg} 2\pi \frac{x}{\lambda} \end{aligned} \quad (10)$$

Le fait que $\operatorname{tg} 2\pi \varphi$ soit légèrement inférieure à $\operatorname{tg} 2\pi \frac{x}{\lambda}$ suggère de poser :

$$\varphi = \frac{x}{\lambda} - d\varphi + \frac{p}{2} \quad (11)$$

avec p entier et $d\varphi$ petit. En remplaçant $d\varphi$ par sa valeur dans l'équation (10) et prenant le développement de $\operatorname{tg} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - d\varphi \right)$ limité aux deux premiers termes :

$$- \frac{2\pi d\varphi}{\cos^2 2\pi \varphi} = - 2c \operatorname{tg} 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

d'où :

$$c \sin 4\pi \frac{x}{\lambda} = 2\pi d\varphi \quad (12)$$

au point d'abscisse $x' = x - \frac{\lambda}{4}$ nous définissons de même $d\varphi'$ par la relation :

$$\varphi' = \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{4} - d\varphi' + \frac{p'}{2} \quad (11')$$

et l'équation (12) deviendra :

$$c \sin 4 \pi \frac{x'}{\lambda} = -c \sin 4 \pi \frac{x}{\lambda} = 2 \pi d \varphi' \quad (12')$$

d'où :

$$d\varphi = -d\varphi' \quad (13)$$

Nous éliminons x entre (11) et (11'), et en tenant compte de (13) nous avons :

$$\varphi - \varphi' = \frac{1}{4} - 2 d\varphi + \frac{q}{2} \quad (14)$$

q étant un entier.

Or, la différence $\varphi - \varphi'$ est égale à la différence $\alpha' - \alpha$ des valeurs données par l'analyse harmonique, on a donc :

$$d\varphi = \frac{1}{2} \left[\alpha - \alpha' + \frac{1}{4} + \frac{q}{2} \right]$$

comme $d\varphi$ doit être petit, les solutions à envisager se ramènent à celles de l'équation :

$$d\varphi = \frac{1}{2} \left[\alpha - \alpha' \pm \frac{1}{4} \right] \quad (15)$$

qui donnent une petite valeur pour $d\varphi$.
Portant cette valeur dans (12), on a :

$$c \sin 4 \pi \frac{x}{\lambda} = \pi \left[\alpha - \alpha' \pm 0,25 \right] \quad (16)$$

qui, jointe à l'équation (9), permet de calculer c et x .

$$c^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{A^2 - A'^2}{A^2 + A'^2} \right]^2 + \pi^2 \left[\alpha - \alpha' \pm 0,25 \right]^2 \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} 4 \pi \frac{x}{\lambda} = 2 \pi \left[\alpha - \alpha' \pm 0,25 \right] \frac{A^2 + A'^2}{A^2 - A'^2} \quad (18)$$

a et a_1 sont obtenus ensuite rapidement, comme dans le cas général, ainsi que t_0 .

3.5.- La considération d'un point situé à une demi-longueur d'onde du premier :

$$x'' = x - \frac{\lambda}{2}$$

nous fournit le moyen de vérifier la théorie ; la comparaison de (3) et (3'') nous donne :

$$A'' = A$$

celle de (4) et (4'') :

$$\operatorname{tg} 2\pi \varphi'' = \operatorname{tg} 2\pi \varphi$$

$$\varphi'' = \varphi + \frac{q}{2} ; (q \text{ entier})$$

d'où :

$$\alpha'' = \alpha - \frac{q}{2}$$

Ce résultat est indépendant de toute approximation, il indique qu'en deux points séparés par une - ou plusieurs - demi-longueurs d'onde, l'addition d'un clapotis partiel ne déphase pas le phénomène dû à la houle progressive pure et fait varier les amplitudes en les laissant égales l'une à l'autre. Nous avons là l'explication des résultats signalés au paragraphe 2.4.

3.6.- Nous avons effectué des enregistrements sur des bases qui ont varié de 1 à 4 quarts de longueur d'onde. Comme nous opérons avec un agrandissement 3 pour les cotes, nous n'avons pas pu faire d'enregistrements simultanés comme nous l'avons dit plus haut (1.7.) Les mesures ont donc été faites en rattachant l'origine des temps à une position du batteur, nous avons pu faire les deux enregistrements correspondants aux extrémités de la base sans arrêter le batteur, mais nos résultats ne sauraient avoir toute la précision qu'on pourra attendre d'enregistrements simultanés. Les valeurs trouvées pour le coefficient de réflexion ont été de 6,3 % pour la base $\lambda/4$ et de 5,5 % pour la base $3\lambda/4$. Etant donné les conditions d'expérimentation, on peut considérer que ces résultats sont satisfaisants. Nous espérons qu'ils seront améliorés par la réalisation d'enregistrements simultanés et que notre théorie pourra être appliquée aussi aux harmoniques.

En conclusion, nous voyons que l'enregistrement par notre appareil du profil dans le temps permet de décomposer une houle complexe en ses éléments et d'étudier l'évolution de ses diverses composantes. Nous pensons que les résultats obtenus montrent que les lois de la houle linéaire sont correctement vérifiées par l'expérience et qu'il est remarquable qu'on puisse vérifier ces lois à partir d'une houle impure.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - L. Santon et C. Marcou - Un enregistreur de profil de houle pour laboratoire - C.R.A.S. t 235 - p. 1278-1280 - 1952.
- 2 - L. Santon - Enregistrement graphique du profil d'une houle au laboratoire. Mémoires et Travaux de la Sté Hydrotechnique de France - Houille Blanche - t 8 A - p. 137-138 - 1953.
- 3 - L. Santon et C. Marcou - Enregistrement graphique du profil d'une houle produite en laboratoire - Houille Blanche - t 8, n° 3 - p. 411-417 - 1953.
- 4 - L. Santon et R. Curtet - Etude mécanique d'un batteur à houle. Annales de l'Institut Polytechnique de Grenoble - t 2, n° 1 - p. 67-69 - 1953.
- 5 - J. Kravtchenko, L. Santon et A. Apté - Sur la théorie approchée d'un batteur à houle. Annales de l'Institut Polytechnique de Grenoble - t 2 1953, n° 4 - p. 11-16.

RESUME

GRAPHICAL RECORDING OF WAVE PROFILES
IN THE LABORATORY; HARMONIC ANALYSIS

L. Santon

We have developed a laboratory wave recorder of great simplicity which plots a wave profile to a scale which can be either 1 or 3 for the amplitude and which varies between 0,5 and 1 for the horizontal distances.

The apparatus, the principle of which we have already described at a time when we had not proved all its possibilities, has shown itself to be extremely sensitive for the study of fine phenomena.

The instrument operates of the following principle : a recording cylinder is covered with paper having a sensitive surface layer and is mounted on the shaft of the gearwheel driving the wave paddle, it thus makes a strictly uniform movement completing one revolution per period. Besides this, a point placed above the surface of the canal forms part of the circuit which also includes a recording nib, the cylinder and the body of water. When the point is immersed the circuit closes and the nib traces a line on the cylinder. The length of this line represents to a certain time scale, the time the point remains immersed. The movements of immersion and emergence of the point are determined with an accuracy of about 1/1000 second.

If the point descends slowly and uniformly and if the pen has a synchronous movement parallel to the axis of the cylinder, a hatched profile of the wave is obtained, the latter is to natural size vertically and to scale C/λ horizontally : C being the circumference of the cylinder and λ the length of the wave.

If, leaving the point at a fixed level it is moved by a known amount in the direction of wave propagation the recording gives an extremely accurate measurement of the wave length. The same result can be obtained by a plotting simultaneously on the same graph, by means of two pens mounted in the same support, a recording of two points either stationary or moving in synchronization. The harmonic analysis made with a single recording gives the different harmonics. The comparison with the results obtained at a known distance, makes it possible to distinguish the progressive waves from the partial clapotis originating from reflexions upon the end of the canal and to verify the propagation laws.