

Chapter 3

EXEMPLE DE REALISATIONS DE MODELES MATHEMATIQUES A SOGREAH POUR DES ETUDES DE PROPAGATION DE HOULE

-

L. BARAILLER et P. GAILLARD*

-

INTRODUCTION

Cet article présente des applications du calcul sur ordinateur électronique à l'étude de la propagation de la houle dans les zones côtières. Cette propagation peut mettre en jeu deux phénomènes :

- . l'effet de la variation des fonds sur la célérité de propagation et en conséquence sur la courbure des fronts d'ondes, phénomène dit de "réfraction" par analogie avec l'optique géométrique.
- . le rayonnement de l'énergie de la houle en arrière d'obstacles naturels ou artificiels, phénomène dit de "diffraction".

Jusqu'à ces dernières années, seule la réfraction faisait l'objet de méthodes de calcul relativement simples, consistant à tracer, soit des fronts d'ondes par application du principe de Huygens, soit les orthogonales à ces fronts par application de la loi de réfraction de Descartes.

En dehors de cas schématiques simples où des solutions théoriques rigoureuses ou approchées sont applicables - tels que la diffraction par une passe dans une jetée rectiligne Cf. [1] ou celle observée en arrière d'une jetée semi-indéfinie Cf. [2] - la pénétration de la houle dans les ports était étudiée sur un modèle physique à échelle réduite.

Mettant à profit les performances des ordinateurs électroniques, la SOGREAH a élaboré trois programmes généraux destinés à calculer les caractéristiques de la houle pour une configuration quelconque des fonds et des ouvrages portuaires.

* Ingénieurs à la SOGREAH - Grenoble - FRANCE.

Ces programmes sont relatifs à trois cas distincts :

1. Celui où seule la réfraction entre en jeu, ainsi que les réflexions éventuelles de la houle sur des ouvrages. Ce programme permet d'étudier la plupart des problèmes de propagation dans les zones d'approche des installations côtières.
2. Celui où la profondeur étant pratiquement constante, seule la diffraction et la réflexion de la houle sont à considérer. Ce programme permet d'étudier essentiellement les conditions d'abri dans les bassins portuaires.
3. Celui où les phénomènes de réfraction et de diffraction interviennent simultanément. Ce programme peut servir dans des conditions particulières de propagation, telles que le franchissement local de hauts fonds ou le contournement d'une presqu'île.

Le dernier de ces programmes est actuellement en cours de mise au point. Les deux premiers ont déjà donné lieu à des nombreuses applications pratiques dans le domaine du génie côtier. Après une brève description du principe de calcul utilisé, on donnera de celles-ci quelques exemples simples sur lesquels les résultats d'autres méthodes de calcul seront comparés.

REFRACTION PURE

La méthode de calcul consiste à tracer point par point le réseau d'orthogonales aux fronts d'onde de la houle connaissant le rayon de courbure local :

$$\rho = \frac{h}{\left| \text{Grad } h \right|} \left(1 + \frac{\text{sh } 2\pi h/L}{2\pi h/L} \right) \quad (1)$$

où :

h désigne la profondeur d'eau locale, considérée comme une fonction des coordonnées géographiques.

\vec{T} le vecteur unitaire tangent à l'orthogonale considérée.

L la longueur d'onde locale déduite de la période de la houle et de la profondeur au moyen de la formule classique d'Airy.

Cette relation résulte de l'application de la relation de Descartes à la réfraction dans un milieu où la variation des fonds est progressive.

Le pas de progression adopté dans ce calcul correspond à un intervalle de temps constant de sorte que les points calculés représentent les noeuds du réseau des fronts d'ondes et des orthogonales. Une table traçante associée à l'ordinateur électronique reporte automatiquement ces points sur une épure où il est ensuite aisé de tracer ce réseau.

L'amplitude de la houle est calculée à partir de l'écartement de deux orthogonales voisines en admettant la conservation du flux d'énergie transmis entre celles-ci.

Sur le modèle mathématique, les fonds marins sont définis aux noeuds d'un réseau maillé au moyen d'un programme d'interpolation annexe exploitant les données relevées suivant des lignes parallèles sur les cartes marines.

La profondeur h et son gradient, qui interviennent dans la relation (1), sont déterminés par une formule d'interpolation appropriée des valeurs de h aux neuf points du réseau qui encadrent le point considéré. La dimension des mailles de ce réseau dépend de la pente des fonds à représenter : elle est généralement de l'ordre de 100 à 250 m. Dans les calculs pratiques, on peut décomposer la zone côtière étudiée en zones où la dimension des mailles est différente suivant la distance à la côte, ou la configuration locale des fonds ; le programme enchaîne automatiquement le calcul au passage d'une zone à une autre.

Le programme actuel permet également de tenir compte des réflexions éventuelles sur des ouvrages côtiers de forme simple se ramenant à une succession d'éléments de forme rectiligne ou circulaire.

Ce procédé de calcul a sur la méthode purement graphique l'avantage :

- . d'une rapidité plus grande du tracé des épures de propagation grâce à l'association ordinateur-table traçante.
- . d'une précision plus grande du tracé des orthogonales et du calcul des amplitudes.
- . de déterminer l'amplitude sur toute la zone de propagation étudiée.

En contre partie, il exige un relevé des fonds et une mise en forme de ces données sur ordinateur qui peut demander beaucoup de temps dans certains cas. Le procédé est cependant particulièrement intéressant lorsque l'on doit, pour une topographie des fonds donnée, étudier successivement la propagation de plusieurs houles de périodes et de directions distinctes.

Les expériences de calcul faites avec la présente méthode dans des cas théoriques où les orthogonales sont connues à priori, ont permis d'apprécier l'influence des divers facteurs sur la précision des résultats obtenus. Ceux-ci font également l'objet d'une confrontation avec des mesures en cours d'exécution à l'échelle nature.

Pour illustrer cette méthode nous présentons sur la figure 1 un cas concret de pénétration de la houle dans un golfe pour lequel on a établi une comparaison avec le tracé à la main des fronts d'onde par application du principe de Huygens. L'accord entre les deux méthodes est très satisfaisant. On peut en particulier vérifier sur la figure 2 que les répartitions de l'amplitude sur le dernier front d'onde fournies par ces méthodes concordent avec une bonne approximation.

DIFFRACTION PURE

La méthode de calcul utilisée, décrite par F. BIESEL et B. RANSON dans [3] sera ici rappelée brièvement. Elle repose sur l'emploi d'une des formules de Kirchoff valables en profondeur constante :

$$\zeta_0 = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial n} (M) G_2 (OM) ds \quad (2)$$

$$\zeta_0 = - \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \zeta (M) \frac{\partial G_1}{\partial r} (OM) ds \quad (3)$$

Γ désigne le contour fermé limitant un domaine arbitraire défini dans la zone de propagation étudiée,

$\zeta_0 = a_0 e^{i\varphi_0}$ l'amplitude sous forme complexe de la houle en un point 0 intérieur,

a_0 l'amplitude de la houle au point 0,

φ_0 sa phase en ce point,

ζ l'amplitude complexe supposée connue en tout point M de Γ

$\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ la dérivée de ζ suivant la normale intérieure à Γ ,

ds la longueur d'un élément de Γ

a. G_1 et G_2 satisfont à l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + m^2 \zeta = 0 \quad (4)$$

où :

$$m = \frac{2\pi}{L}$$

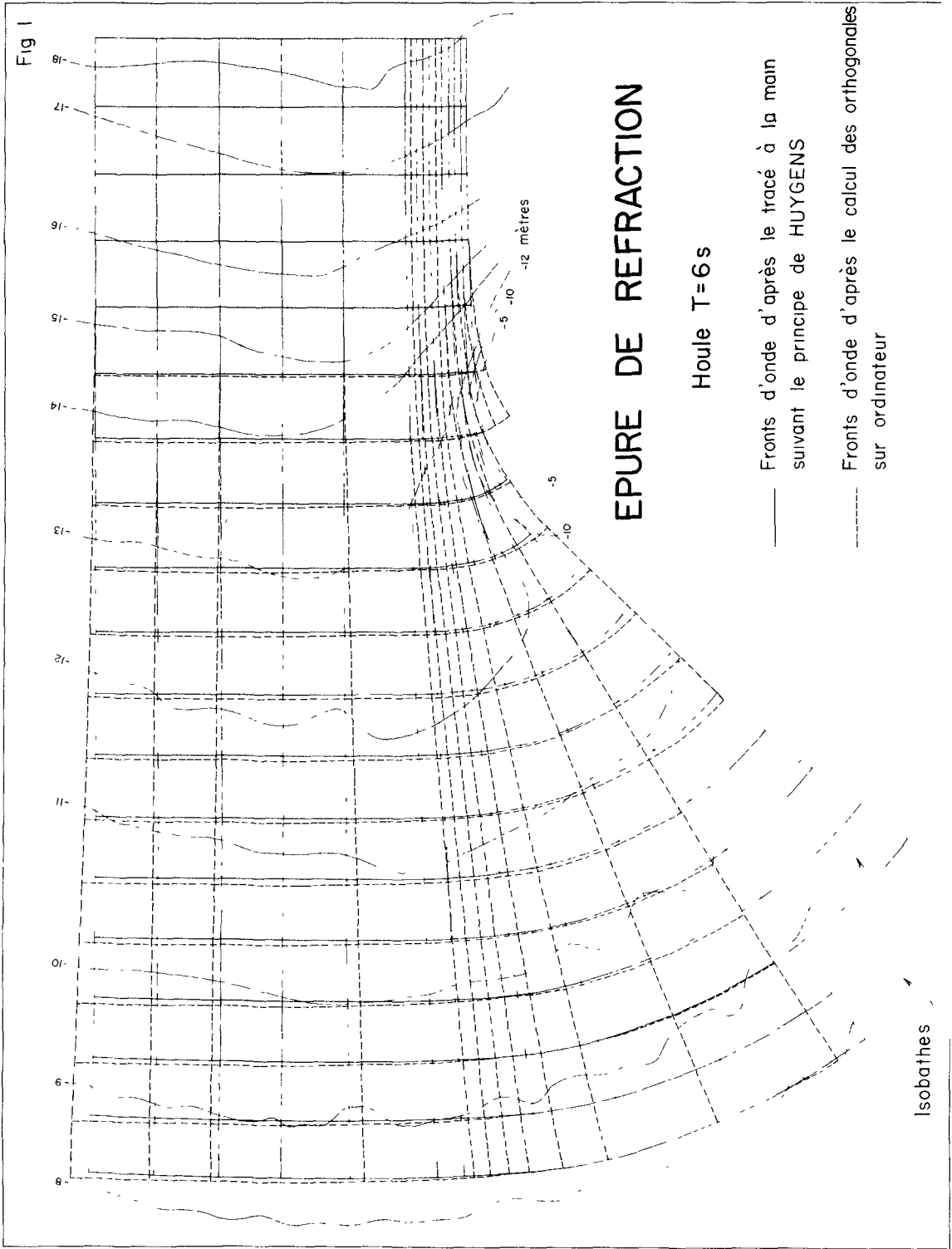


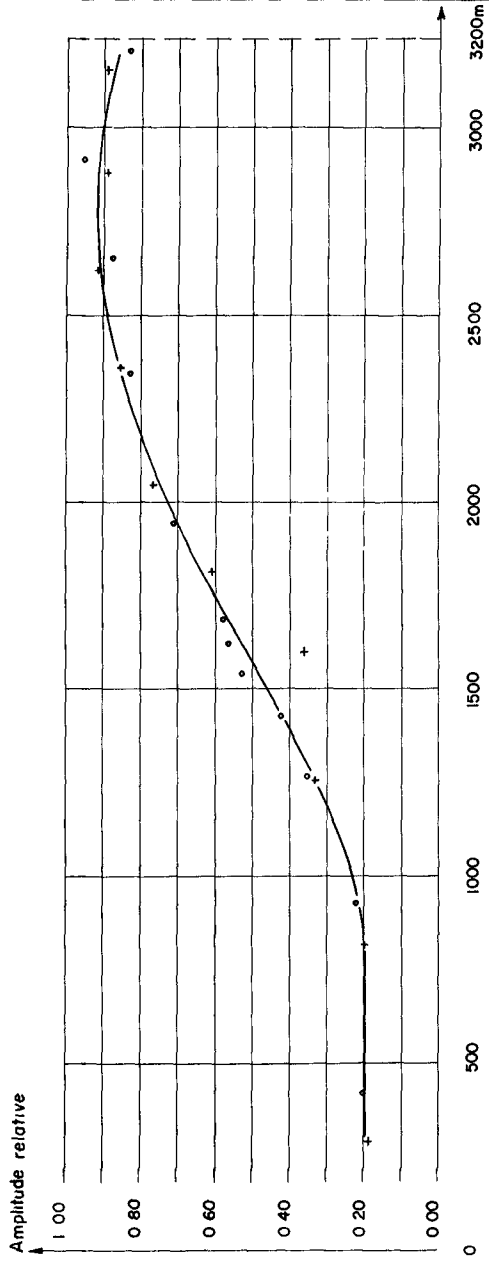
Fig 2

EPURE DE REFRACTION

Houle T = 6 s

Amplitude le long du dernier front d'onde

+ d'après construction d'HUYGENS
o d'après calculs sur ordinateur



- b. elles ont au voisinage de 0 un comportement logarithmique.
- c. elles sont continues dans le domaine D sauf au point 0 et possèdent des dérivées partielles secondes.
- d. elles satisfont aux conditions suivantes sur Γ :

$$G_1(OM) = 0$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial n}(OM) = 0 \tag{5}$$

Ces fonctions n'ont d'expression simple que dans un petit nombre de cas et en particulier dans celui d'un domaine D constitué d'un demi-plan où l'on a :

$$G_2 = 2H_0^{(1)}(mr) \tag{6}$$

$$\frac{dG_1}{dn} = 2m H_1^{(1)}(mr) \cos \theta$$

où :

- $H_0^{(1)}$ et $H_1^{(1)}$ désignent les fonctions de Hankel de première espèce d'ordre 0 et 1 respectivement,
- r la distance OM,
- θ l'angle de \vec{MO} avec la normale intérieure à Γ au point M.

Les expressions (6) sont applicables à un domaine D de forme quelconque à condition de :

- . Décomposer, si cela est nécessaire, le domaine réel considéré en plusieurs domaines partiels de forme convexe,
- . De ne considérer comme données que les ondes pénétrant dans chaque domaine partiel considéré. Les ondes éventuellement réfléchies par les parois entrent évidemment dans cette catégorie au même titre que les ondes incidentes transmises directement dans ce domaine (par des passes entre bassins communicants par exemple).

Moyennant ces précautions, il est possible de superposer (puisque l'on se limite à la théorie linéaire de la propagation de la houle) les solutions théoriques relatives aux différents demi-plans limités par les tangentes au contour Γ de chaque domaine partiel et contenant ce domaine. En d'autres termes, le calcul sur ordinateur remplace les intégrales (2) et (3) par des sommations finies où

chaque élément du contour, de longueur ds , joue le rôle d'une brèche dans une jetée rectiligne de longueur indéfinie et à travers laquelle la houle incidente pénètre dans le domaine partiel considéré.

Après une étude comparative des formules (2) et (3), la préférence a été donnée à la première, pour laquelle l'hypothèse à formuler le long d'une paroi réfléchissante à savoir :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)_{\text{réfléchié}} \text{ onde} = - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)_{\text{incidente}} \text{ onde} \quad (7)$$

est plus conforme à la réalité qu'une condition arbitraire imposée à ζ (la plus simple étant $\zeta = 0$ à l'abri d'une jetée).

Dans le cas d'une paroi partiellement absorbante la relation (7) est remplacée par :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)_{\text{réfléchié}} \text{ onde} = -\alpha \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)_{\text{incidente}} \text{ onde} \quad (8)$$

où :

α est le coefficient de réflexion de l'ouvrage qui peut être fonction de l'incidence comme lors du calcul de l'onde incidente.

Le calcul de la valeur de $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)$ correspondant à l'onde pénétrant dans chaque domaine partiel considéré est donc nécessaire à partir des valeurs correspondantes connues sur la frontière du domaine réel :

- sur toutes les parois partiellement ou totalement réfléchissantes qui font partie du contour Γ . (La valeur de $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ relative à l'onde incidente joue le rôle d'inconnue et $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ celle relative à l'onde réfléchié le rôle de donnée),
- sur toutes les parties du contour Γ communes à deux domaines partiels adjacents (la valeur de $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ qui joue le rôle de donnée dans l'un des bassins joue le rôle d'inconnue dans l'autre).

On utilise pour cela la formule suivante déduite de (2) par dérivation au point O , qui en l'occurrence se trouve sur Γ :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)_O = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial n} (M) \frac{\partial^G \zeta}{\partial n} (OM) ds \quad (9)$$

avec :

$$\frac{\partial^G \zeta}{\partial n} = 2m H_1^{(1)}(mr) \cos \psi \quad (10)$$

où ψ est l'angle entre la normale intérieure au contour Γ et le vecteur OM .

Le calcul de l'amplitude dans un domaine portuaire de forme quelconque comporte ainsi :

- . dans une première phase le calcul éventuel des $\frac{\delta \zeta}{\delta n}$ inconnus. Ce calcul est effectué par itérations successives, la convergence des résultats obtenus étant contrôlée d'un tour de calcul au suivant,
- . dans une deuxième phase, le calcul de ζ_0 proprement dit.

Si l'on considère à titre d'exemple l'avant-port dont la configuration est indiquée sur la figure 3, le domaine D situé à droite de aa' peut être décomposé en deux domaines partiels D1 et D2 présentant une frontière commune B1b. La connaissance des caractéristiques de la houle incidente dans la passe A1 A2 permet de déterminer :

- . en vue du calcul de ζ dans le domaine D1, la valeur de $\frac{\delta \zeta}{\delta n}$ sur les parois A1a, B1A2 et B1B2 si celles-ci ne sont pas totalement absorbantes.
- . en vue du calcul de ζ dans le domaine D2, la valeur de $\frac{\delta \zeta}{\delta n}$ sur la limite fictive B2b. Si l'on admet l'absence totale de réflexions sur la partie droite de D2, il n'y a aucune réflexion à considérer sur les éléments a'B1 et B1B2, il n'y a également aucune transmission de houle réfléchie de D2 vers D1 et la valeur de $\frac{\delta \zeta}{\delta n}$ à prendre en considération le long de B2b lors du calcul de ζ dans D1 est nulle.

La méthode exposée permet d'étudier les conditions d'abri des bassins portuaires, quelles que soient le pouvoir réfléchissant des ouvrages et la complexité de leur disposition. Elle fait actuellement l'objet à la SOGREAH d'une confrontation avec les résultats d'une étude sur modèle réduit de quelques dispositions types, afin de déterminer la meilleure façon de schématiser sur un modèle mathématique des ouvrages réels tels qu'une jetée à talus ou une jetée verticale de largeur non négligeable vis à vis de la longueur d'onde de la houle. Le lecteur trouvera dans la communication de M. MONTAZ à ce même congrès Cf. [4] les principaux résultats obtenus à ce jour.

Pour illustrer ce qui précède, nous indiquons ici un résultat fragmentaire obtenu au cours d'une étude effectuée pour guider le choix de l'implantation d'un nouveau bassin portuaire. Sur la figure 3 sont esquissés deux éléments de projets étudiés et sur la figure 4 sont indiquées les valeurs de l'amplitude relative de la houle à l'abri de la jetée en fonction de la distance au musoir. Pour la disposition (a) on présente également les valeurs calculées par la solution théorique de SOMMERFELD [2] pour une jetée rectiligne,

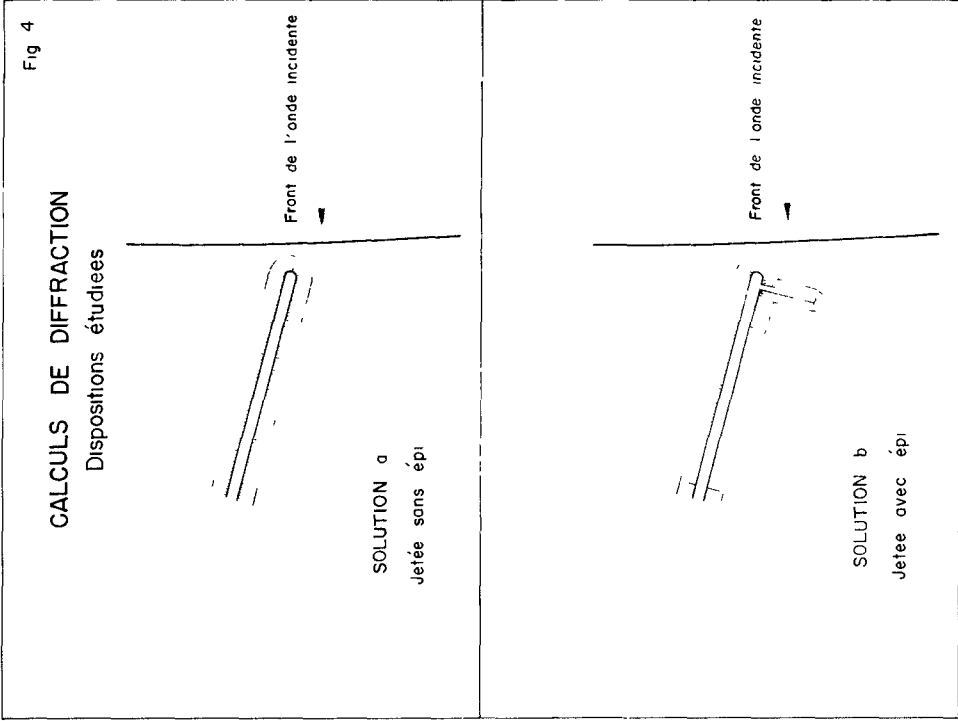


Fig 3

CALCULS DE DIFFRACTION

Exemple schématique d'application

semi-indéfinie et celles déduites d'une formule asymptotique proposée par CARRY et CHAPUS Cf. [5]:

$$2a = \frac{1}{2\pi (r/L)^{\frac{1}{2}} \sin \theta_0} \quad (11)$$

où :

- 2a est l'amplitude de la houle,
- r la distance au musoir,
- L la longueur d'onde de la houle,
- θ_0 l'angle d'incidence de la houle par rapport à la jetée.

REFRACTION ET DIFFRACTION SIMULTANÉES

La formule (2) traduit en profondeur constante et sous une forme mathématique précise le fait que l'effet de la houle au point O est identique à celui de sources ponctuelles fluctuantes réparties le long du contour Γ , conformément au principe de Huygens. Dans un domaine D de profondeur variable, le calcul de l'agitation observée en O consiste à appliquer des formules analogues à (2) et (9), où les fonctions G2 et dG2/dn sont liées au flux d'énergie connu émis par les sources ponctuelles équivalentes. La formule (2) en particulier est remplacée par :

$$\zeta_0 = \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{dn} (M) I(OM) e^{i\phi(OM)} ds$$

où :

$$I(OM) = \left(\frac{\theta}{2\pi m} \frac{c}{\sigma_0} \frac{c_g}{c_{g0}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$\phi(OM) = \int_0^M m(r) dr - 3\pi/4$$

- c_g et c_{g0} désignent les célérités de groupes de la houle en M et O,
- σ_0 l'écartement de 2 rayons d'onde voisins issus de la source M et formant en ce point un petit angle θ ,
- r l'abscisse curviligne le long du rayon d'onde issu de M et passant par O,
- $m = 2\pi/L$ la valeur du nombre d'onde en un point courant de ce rayon.

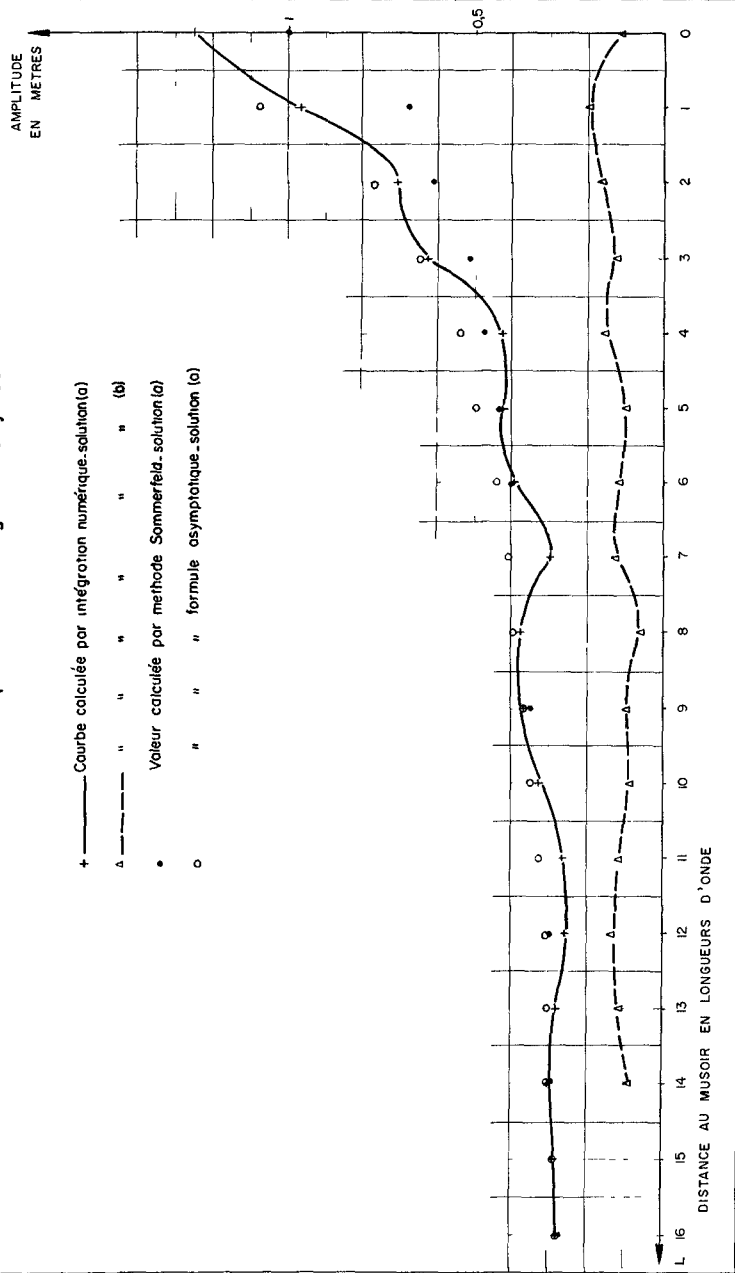
Le calcul pratique de l'amplitude et de la phase de la houle en un point comporte :

- d'une part le tracé des rayons d'ondes parvenant en ce point à partir des sources ponctuelles fictives réparties sur Γ .

Fig 5

CALCULS DE DIFFRACTION

Variation de l'amplitude le long de la jetée



- d'autre part le calcul de $I(OM)$ et $\phi(OM)$. La détermination de σ_0 en particulier s'effectue par intégration de l'équation différentielle régissant l'évolution de l'écartement de deux rayons d'onde voisins :

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} + p(r) \frac{d\sigma}{dr} + q(r)\sigma = 0$$

avec :

$$p(r) = -\frac{1}{c} \frac{dc}{dr} \tag{13}$$

$$q(r) = \frac{1}{c} \frac{d^2c}{dn^2}$$

où :

- c désigne la célérité de phase de la houle au point courant,
- r l'abscisse curviligne le long d'un rayon d'onde,
- n l'ordonnée suivant la normale à ce rayon au point courant Cf. [6]

Les conditions d'applications de (12) et l'organisation des calculs, hormis les points qui viennent d'être soulignés, sont les mêmes que dans le cas de la diffraction pure.

Le processus de calcul est, comme on peut s'en rendre compte d'après le principe exposé, beaucoup plus long à exécuter que les deux précédents programmes. C'est pourquoi, bien que ce dernier programme soit en principe applicable aux phénomènes spécifiques aux précédents, il convient de ne l'utiliser que si les phénomènes de réfraction et de diffraction risquent d'entrer en jeu simultanément. Ceci peut être le cas par exemple :

- lors du contournement par la houle d'une presqu'île ou d'une jetée dans une zone où les fonds varient notablement.
- lors du franchissement d'un haut fond (sans toutefois que le déferlement entre en jeu). Dans ce dernier cas, une épure de réfraction fait apparaître une forte convergence du faisceau d'orthogonales aux fronts d'ondes et localement le croisement de certaines d'entre elles, de sorte que le calcul de l'amplitude par le premier programme décrit perd beaucoup de son intérêt à cet endroit.

une étude est actuellement en cours pour déterminer les modalités d'application de ce dernier procédé, notamment par comparaison avec des mesures sur modèle réduit dans des cas particuliers appartenant aux types cités.

CONCLUSION

La rapidité d'exécution des calculs et la précision des résultats obtenus au moyen d'ordinateurs électroniques permettent d'envisager l'étude sur modèle mathématique de la propagation de la houle même par des procédés aussi complexes que le dernier décrit.

L'ensemble des programmes de calcul décrits ici vise à déterminer les caractéristiques de la houle dans les zones côtières et dans les bassins portuaires, quelle que soit la configuration des fonds et la disposition des ouvrages étudiés.

REFERENCES

- (1) MORSE P.M. et RUBENSTEIN P.J. "The diffraction of waves by ribbons and by slits" Physical Review 54, 1938.
- (2) SOMMERFELD A. "Vorlesungen über theoretische Physik", Band IV, Optik 1950.
- (3) F. BIESEL et B. RANSON "Calculs de diffraction de la houle" A.I.R.H. Dubrovnik 1961.
- (4) J.P. MONTAZ "Etude expérimentale systématique en vue de l'utilisation de modèles mathématiques pour l'étude de la diffraction pure de la houle" Congrès Coastal Engineering, Lisbonne 1964.
- (5) CARRY et CHAPUS "Calcul pratique de l'amplitude de la houle diffractée derrière une jetée semi-indéfinie", la houille blanche n° 1, 1951.
- (6) MUNK W.H. et ARTHUR R.S. "Wave intensity along a refracted ray" Gravity waves, Nat. Bur. Standards. Circular 521, 1952.